

Dinâmica de Sistemas Planetários



Wladimir Lyra

Sagan Fellow

NASA/JPL-Caltech



Prova de Aula

OV, Rio de Janeiro, Maio 2014

Outline

- Problema de 2 corpos
 - Leis de Kepler
 - Tipos de órbita
 - Elementos orbitais
- Problema de 3 corpos
 - Constante de Jacobi
 - Pontos Lagrangeanos
 - Resonância
- Marés
 - Io
 - Encélado
- Potencial de corpos oblatos
 - Precessão

Problema de dois corpos

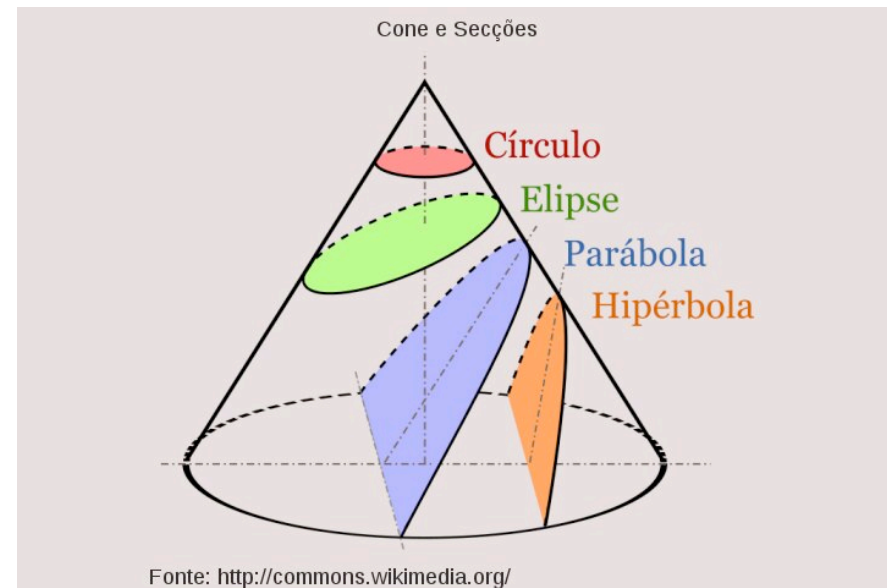
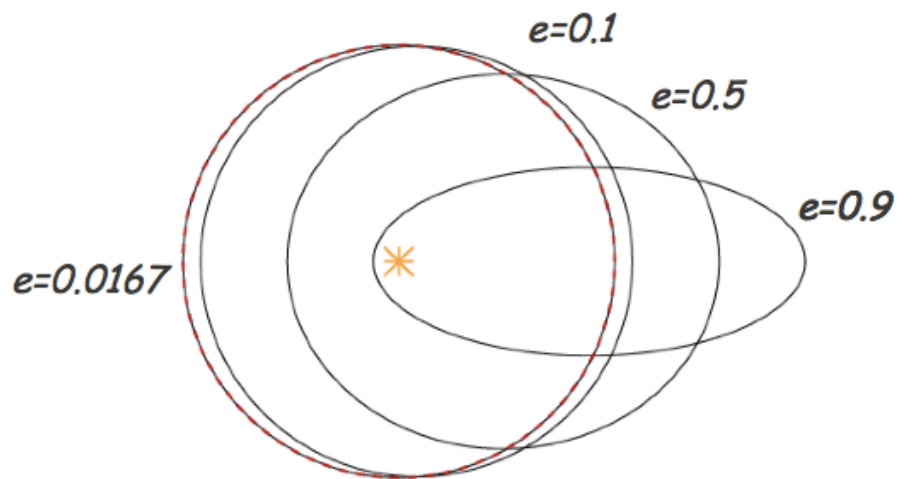
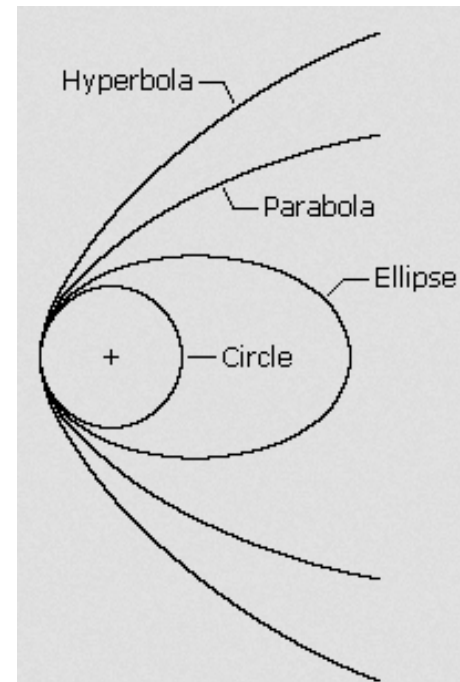
Leis de Kepler

1. Os planetas descrevem órbitas elípticas, com o Sol num dos focos.
2. O raio vetor que une um planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais.
3. O quadrado dos períodos de revolução são proporcionais aos cubos das distâncias médias do Sol aos planetas ($T^2 = ka^3$)



Tipos de órbita

Círculo	$e=0$	$p=a$
Elipse	$0 < e < 1$	$p=a(1-e^2)$
Parábola	$e=1$	$p=2q$
Hipérbola	$e > 1$	$p=a(e^2-1)$

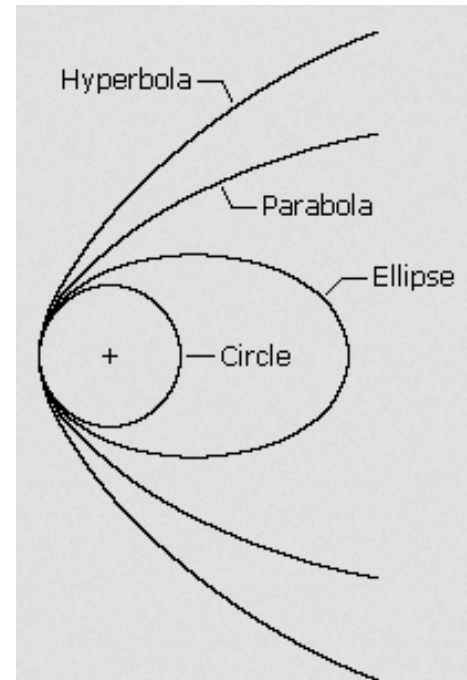


Tipos de órbita

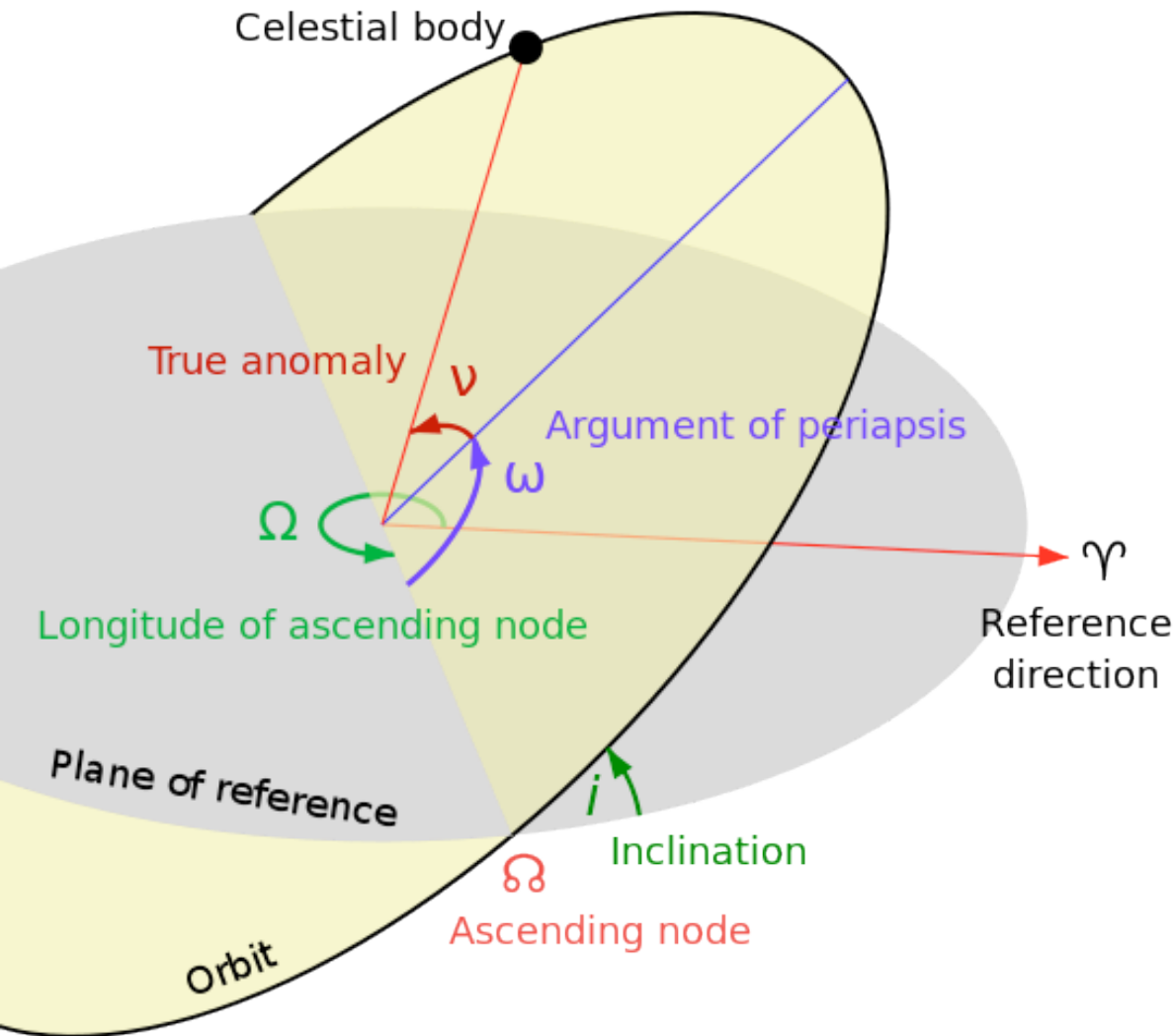
Tipo	Excentricidade	Energia
Círculo	$e=0$	$E=E_{\min}$
Elipse	$0<e<1$	$E_{\min}<E<0$
Parábola	$e=1$	$E=0$
Hipérbola	$e>1$	$E>0$

Ligadas

Não-ligadas



Problema de dois corpos: Elementos Orbitais



Principais: a, e, i

Ω : longitude do nodo
ascendente

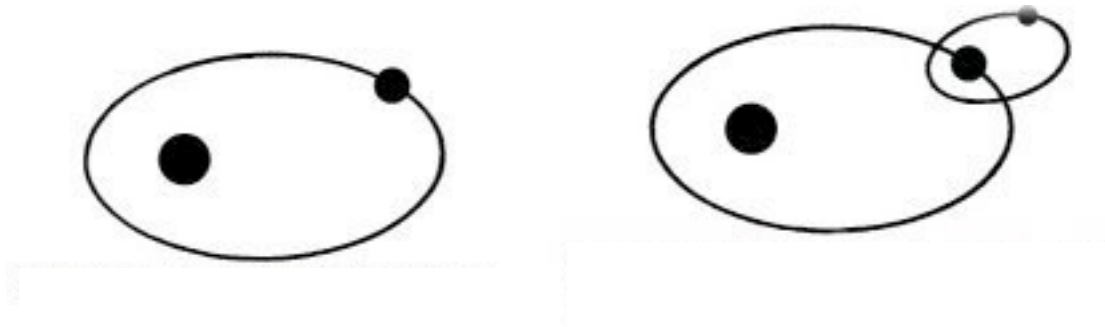
ω : argumento da periapse

v: anomalia verdadeira

Equivalente a especificar x, v (seis quantidades)

Equivalente a especificar x, v (seis quantidades)

Problema de três corpos



Não há solução geral salvo raras exceções.

Simplificação de utilidade prática

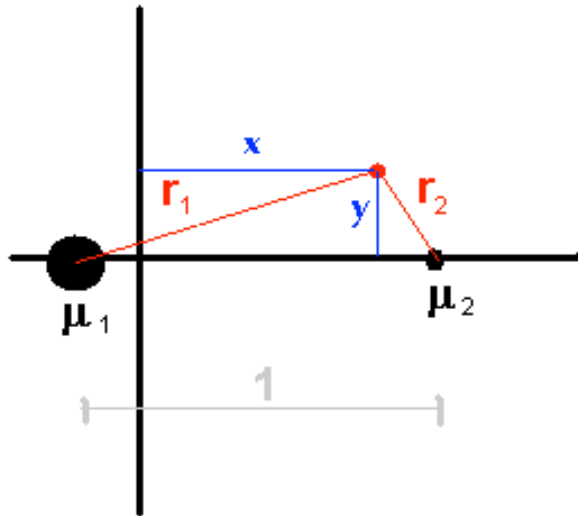
Problema restrito de três corpos ($m_3 \ll m_1, m_2$)

Se os outros dois corpos estiverem em órbitas circulares:

Problema restrito circular de três corpos

Constante de Jacobi

O problema restrito circular de três corpos tem uma *integral de movimento* para a partícula-teste: a *constante de Jacobi*.



$$C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

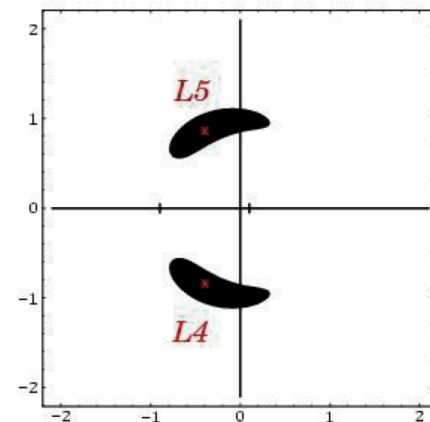
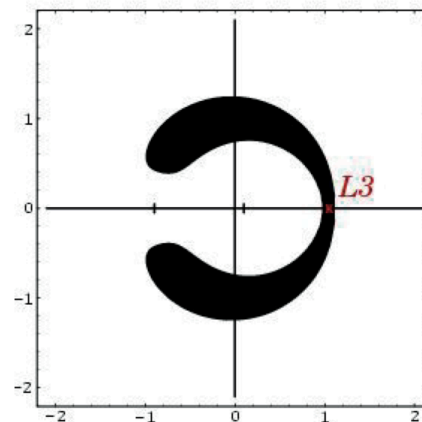
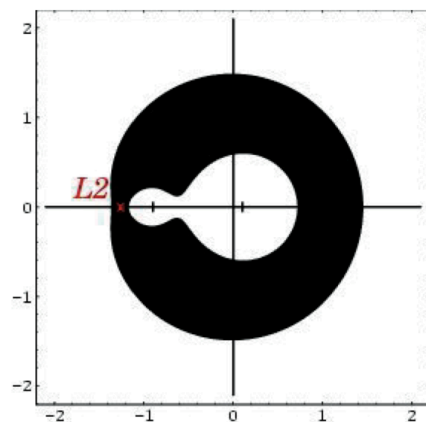
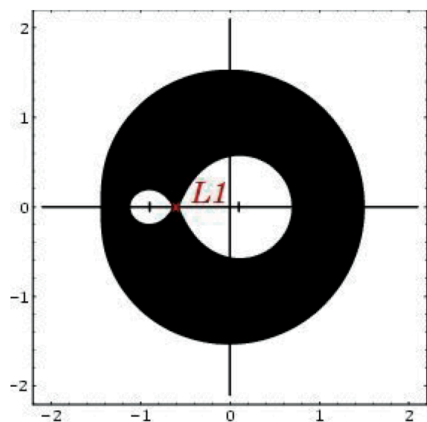
$$n = 2\pi/T \text{ (movimento médio)}$$

$$\mu_1 = Gm_1$$

$$\mu_2 = Gm_2$$

Constante de Jacobi e Pontos Lagrangeanos

À medida que C_J diminui,
pontos especiais aparecem.



movimento **proibido** nas áreas escuras

C_J

Constante de Jacobi e Pontos Lagrangeanos

À medida que C_J diminui,
pontos especiais aparecem.

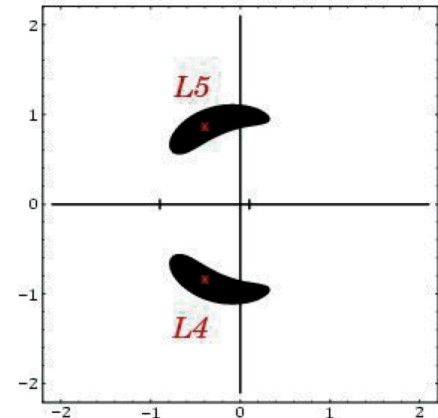
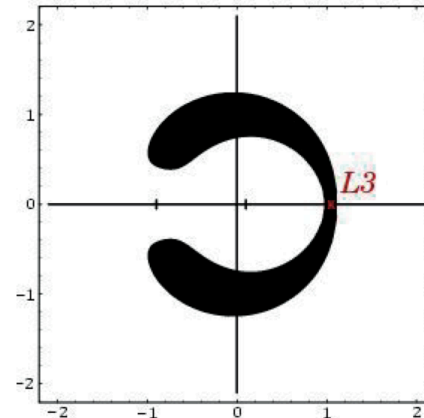
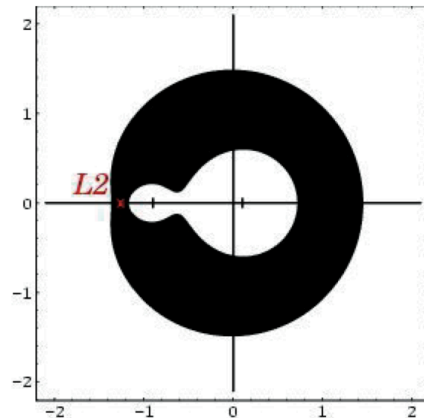
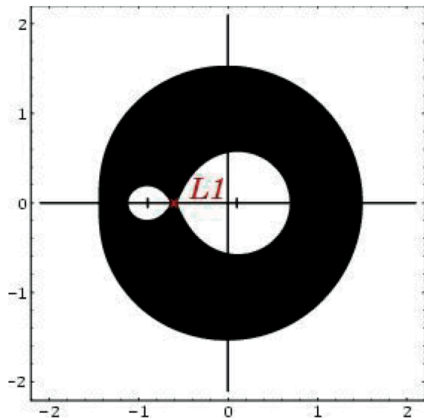
L1: Instável

L2: Instável

L3: Instável

L4: Estável

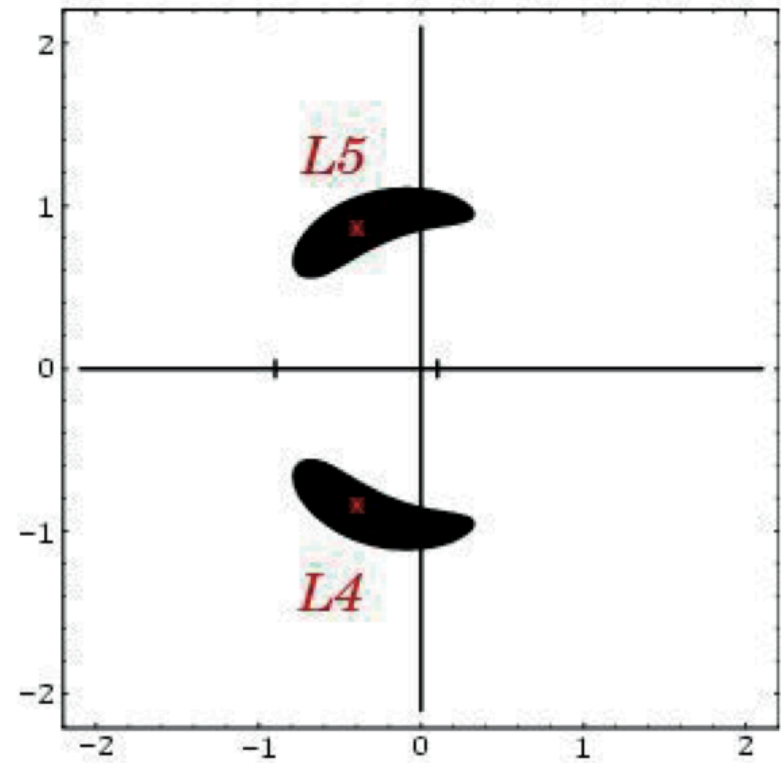
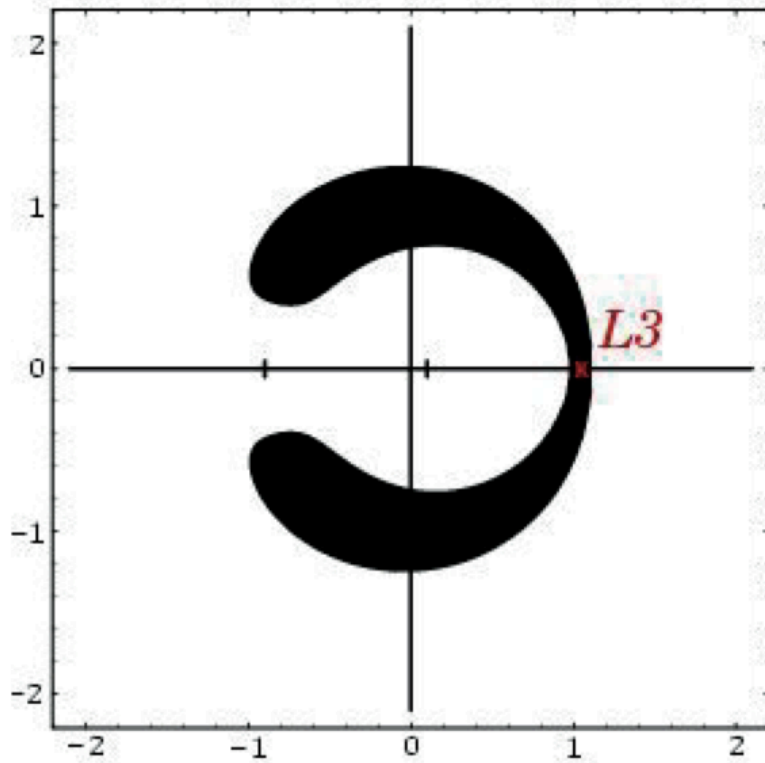
L5: Estável



movimento *proibido* nas áreas escuras

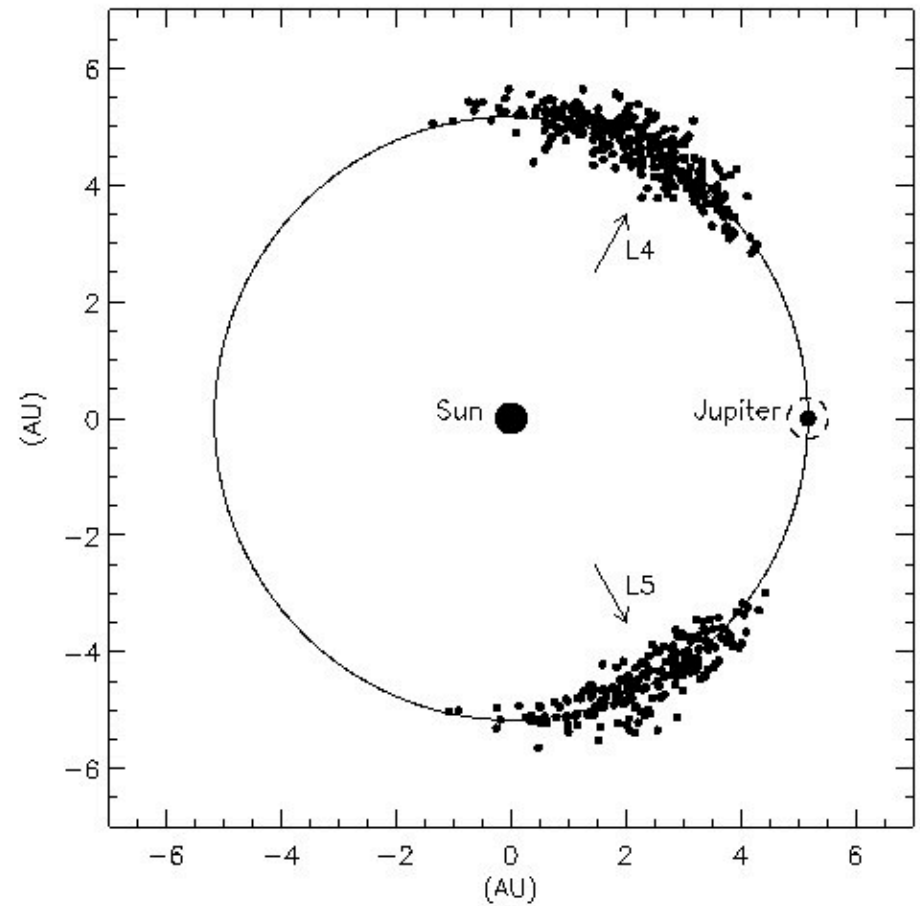
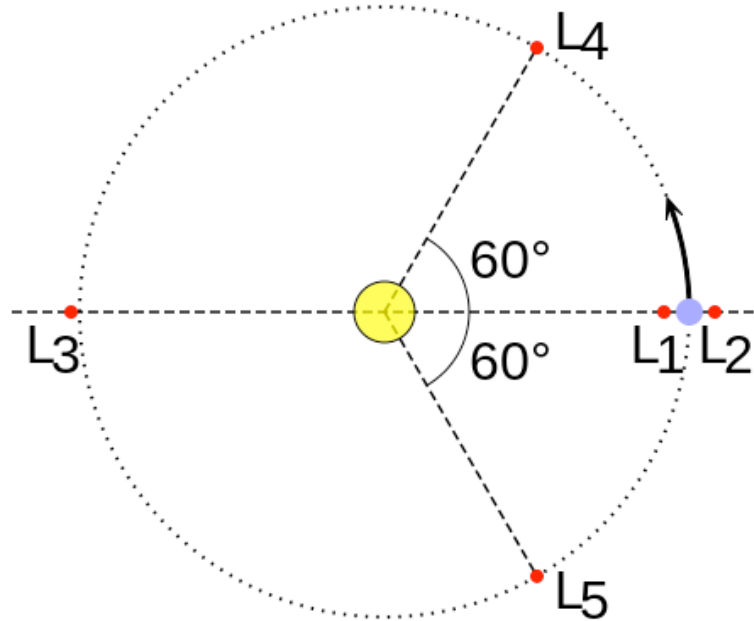
C_J

Orbitas de Ferradura e Girino



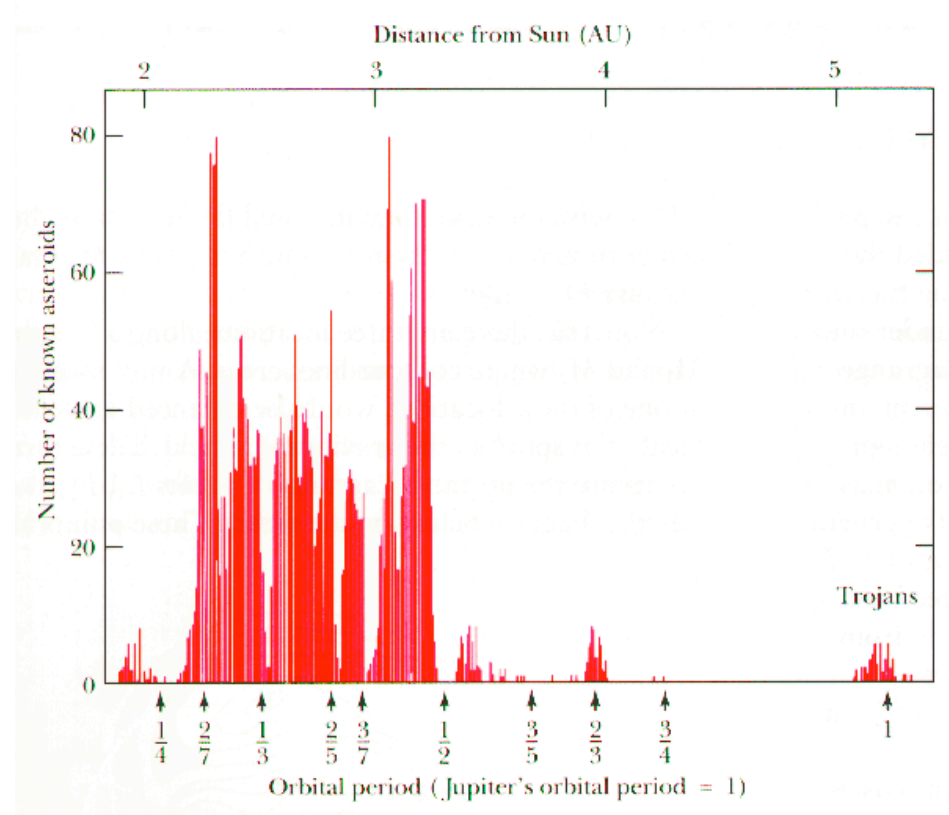
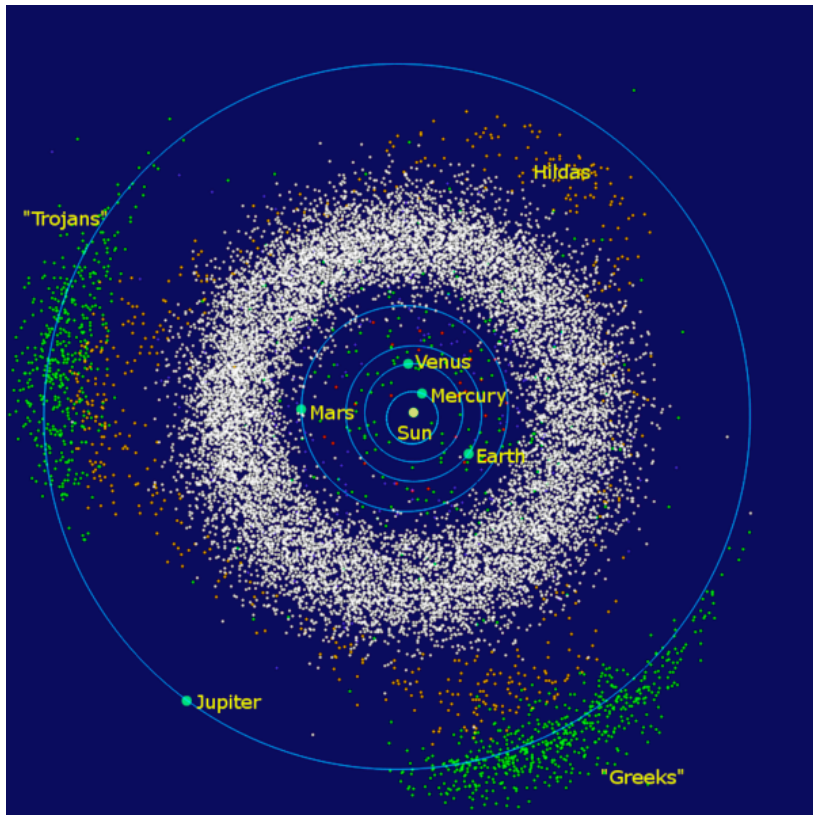
movimento *proibido* nas áreas escuras

Pontos Lagrangeanos e Asteróides Troianos



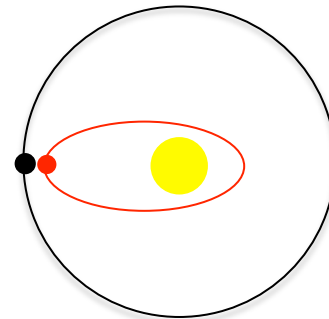
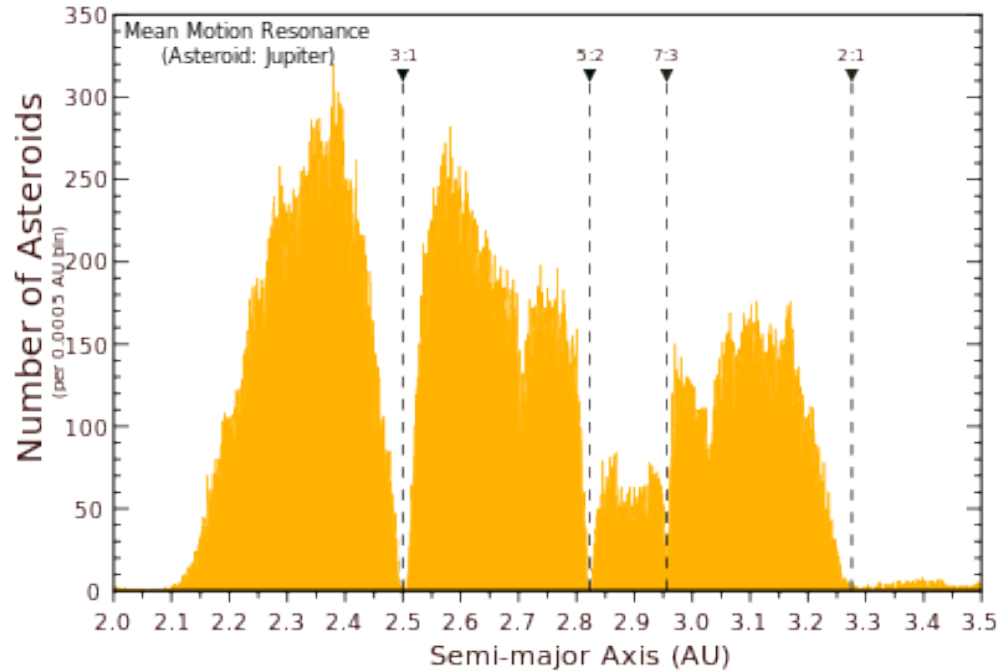
Resonâncias

Falhas de Kirkwood

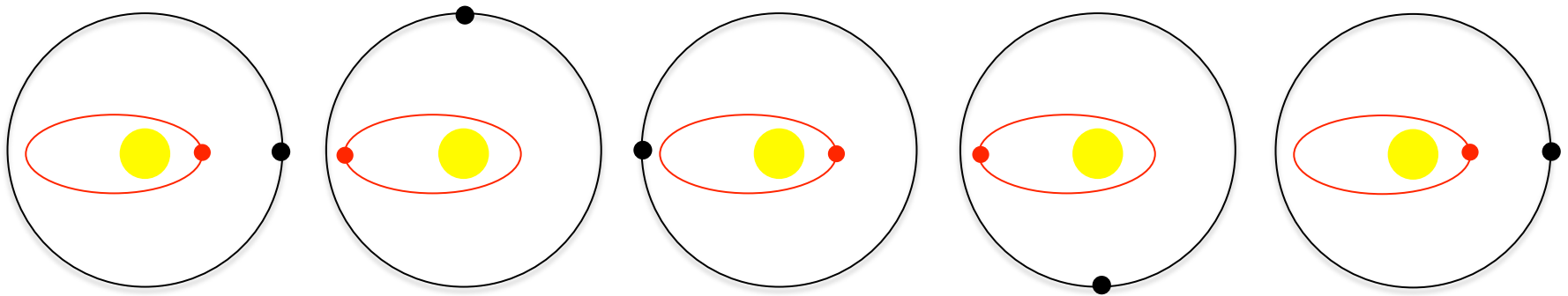
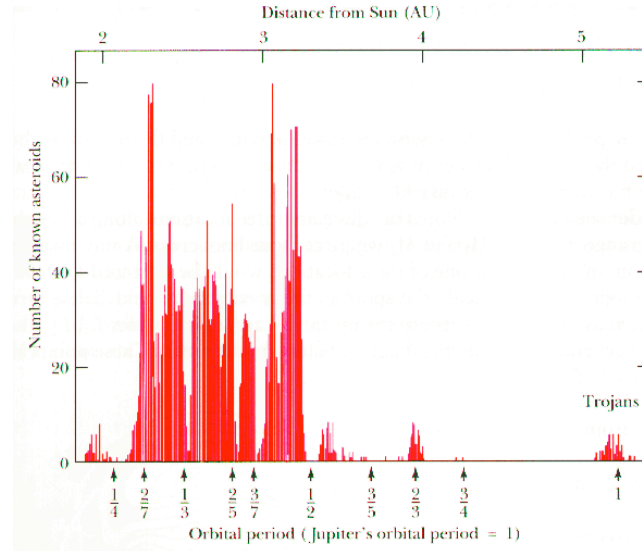


Resonâncias: Falhas de Kirkwood

Asteroid Main-Belt Distribution
Kirkwood Gaps

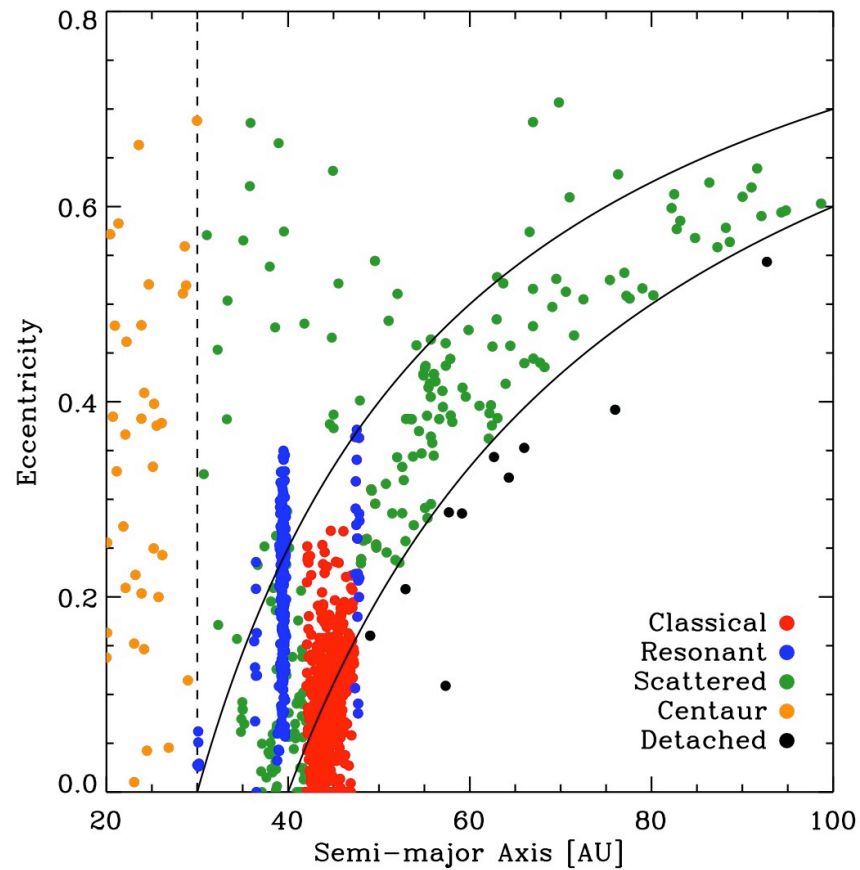


Resonância protegida



Se, em ressonância, a conjunção com Júpiter for periélica, o asteróide pode nunca chegar muito perto do planeta.

Resonância protegida: Plutão e Plutinos



Ressonância 3:2 com Netuno

Satélites de Jupiter

Atividade: Qual é o período orbital dos satélites Galileanos?



Io

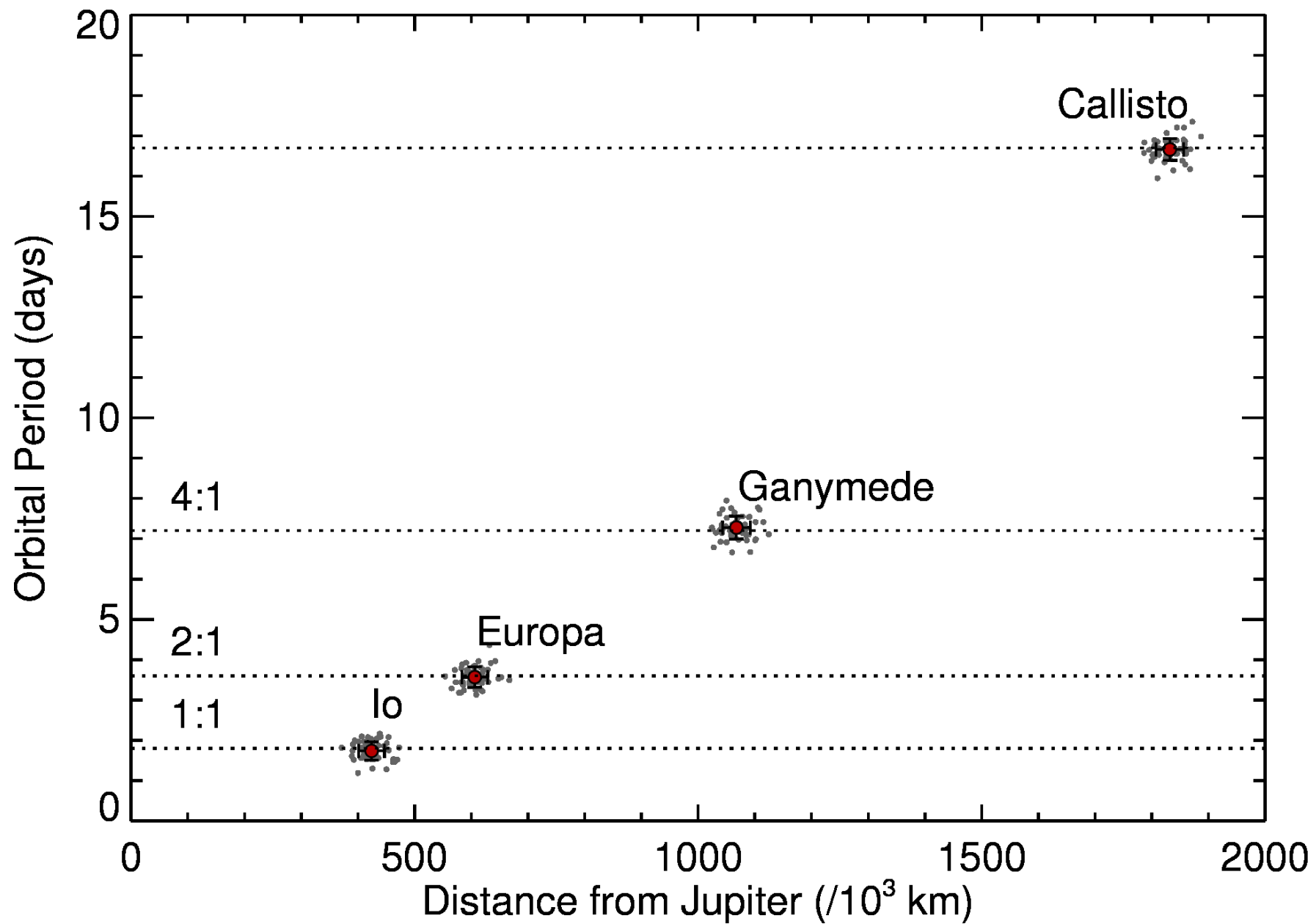
Europa

Ganymedes

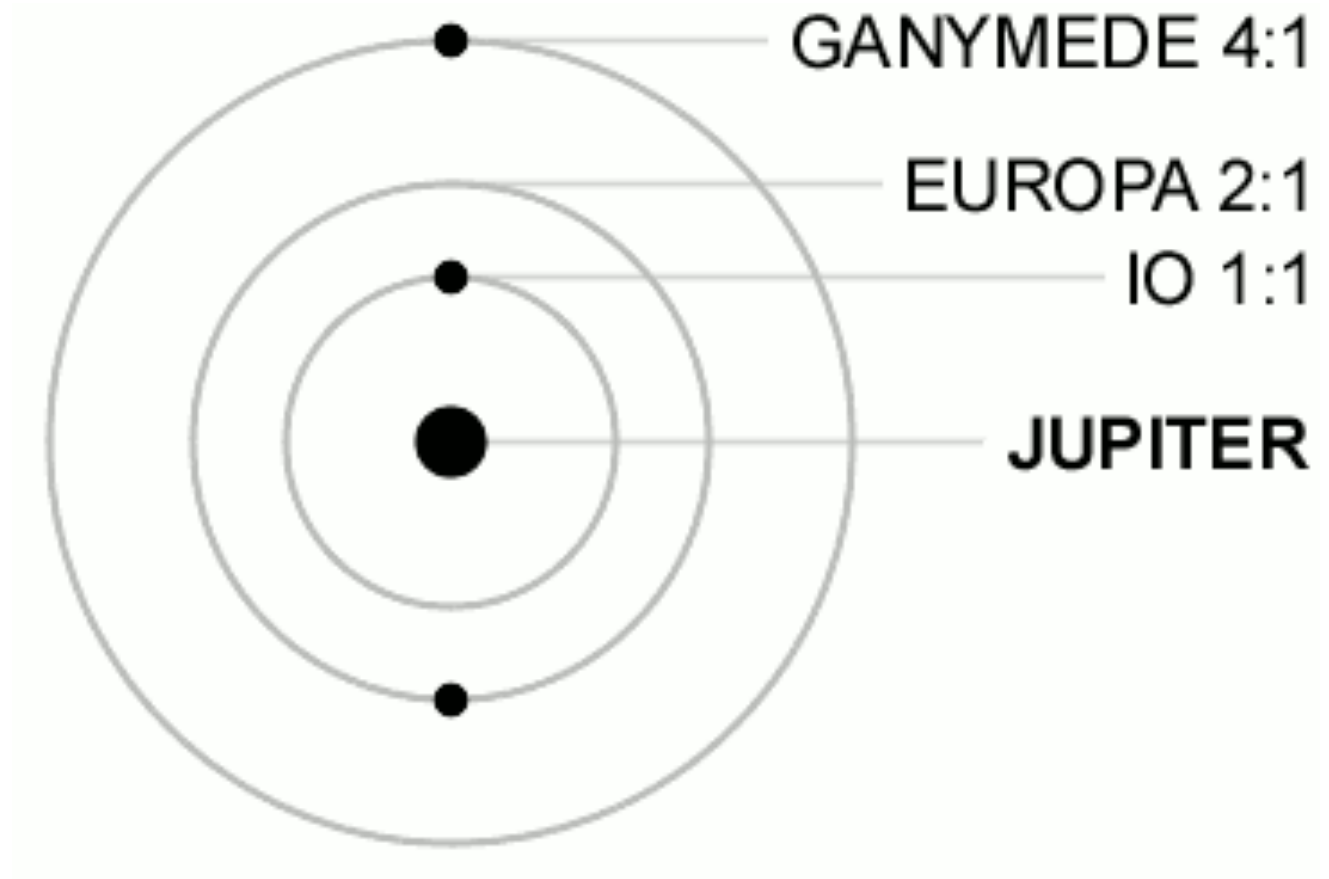
Calisto

d	h	
0	0	
0	12	
1	0	
1	12	
2	0	
2	12	
3	0	
3	12	
4	0	
4	12	
5	0	
5	12	
6	0	
6	12	
7	0	
7	12	
8	0	
8	12	
9	0	
9	12	
10	0	

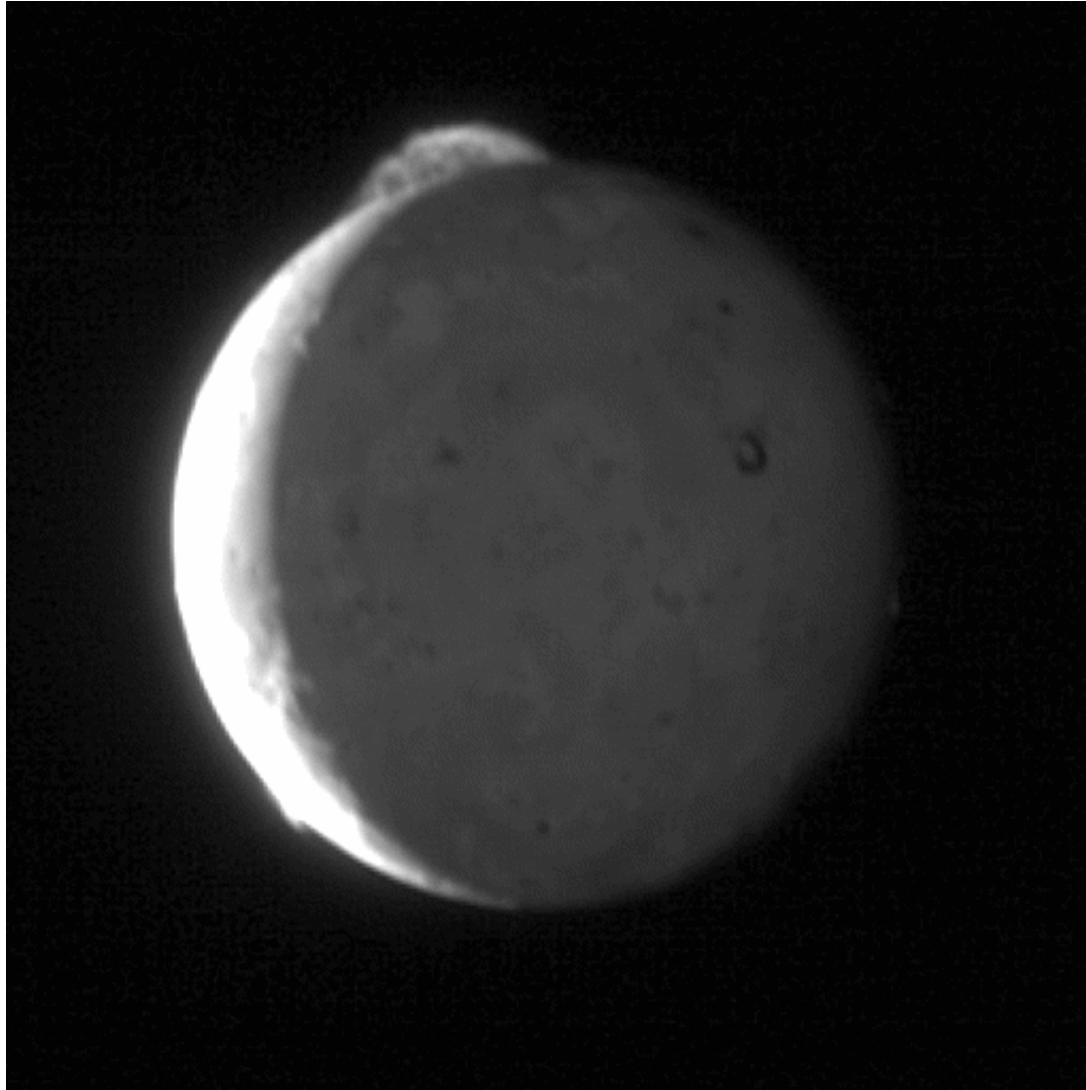
Images captured from <http://www.shallowosky.com/jupiter/>



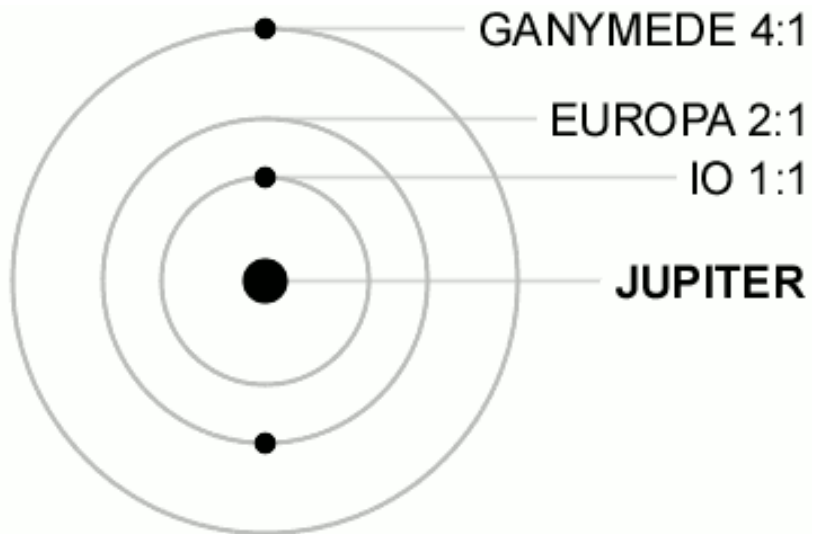
Ressonância de Laplace

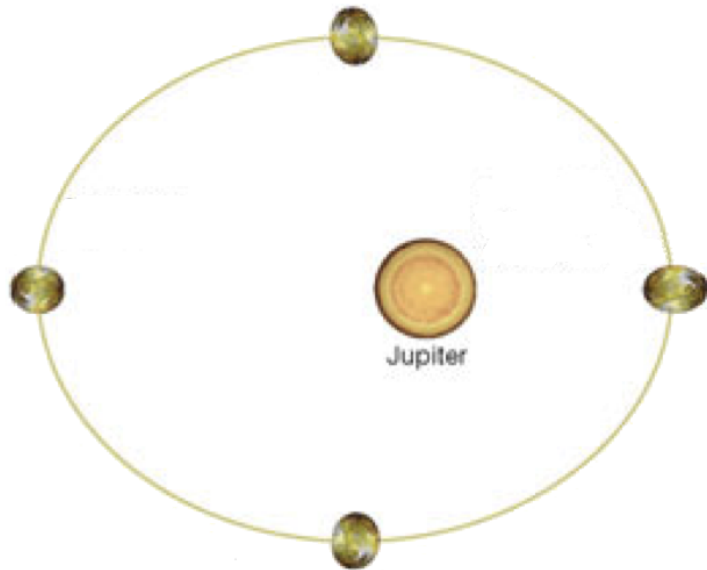


Io in action



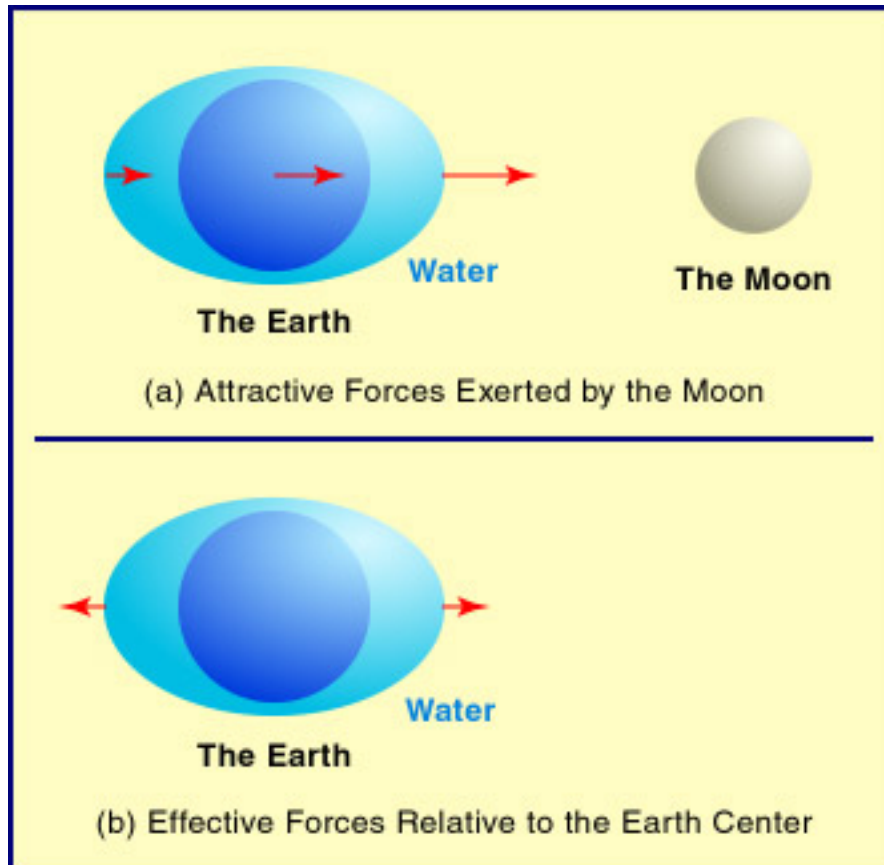
Io no balanço





O puxão periódico das luas externas (Europa e *Ganimedes*) torna a órbita de Io levemente elíptica ($e \sim 0.004$).

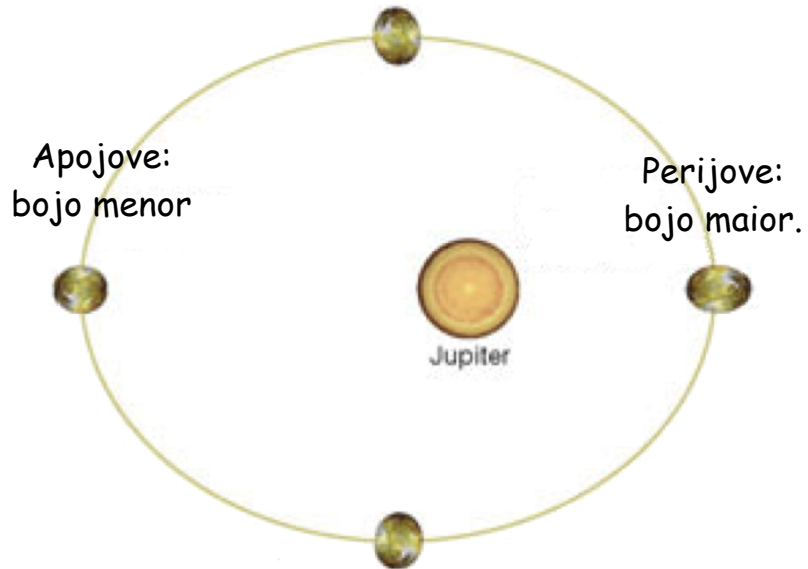
Marés



O lado próximo está sujeito a uma força maior que o lado afastado.

O Resultado é uma força efetiva, diferencial, a **Força de Maré**.

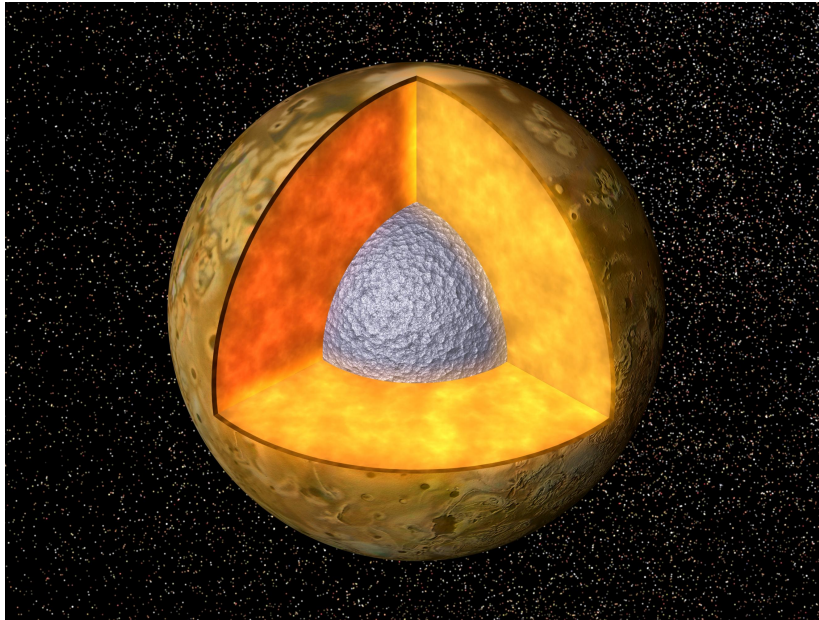
Aquecimento por Marés



Diferença no bojo de maré
entre perijove e apojove é de
100 m

FRICÇÃO INTENSA!!!

Aquecimento por marés mantém o interior de Io derretido

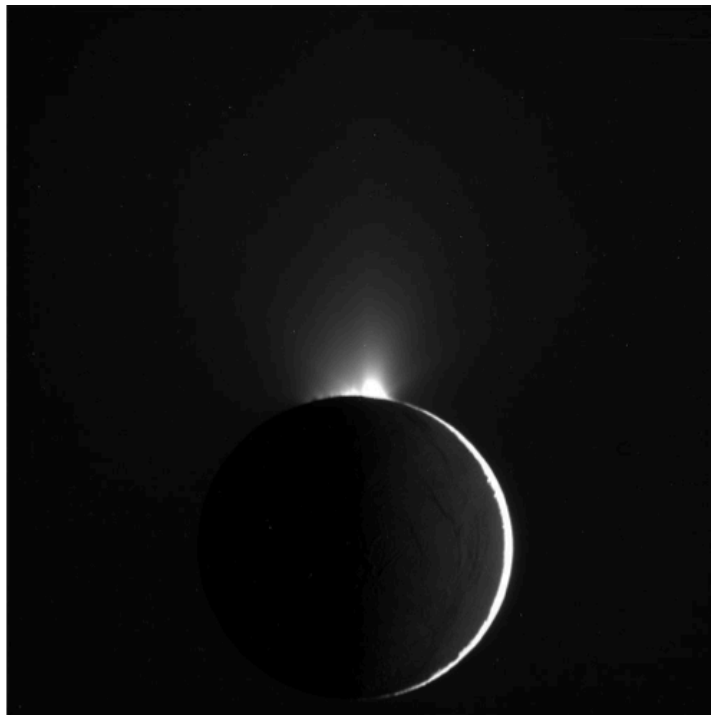


Fina camada de silicatos

Interior derretido

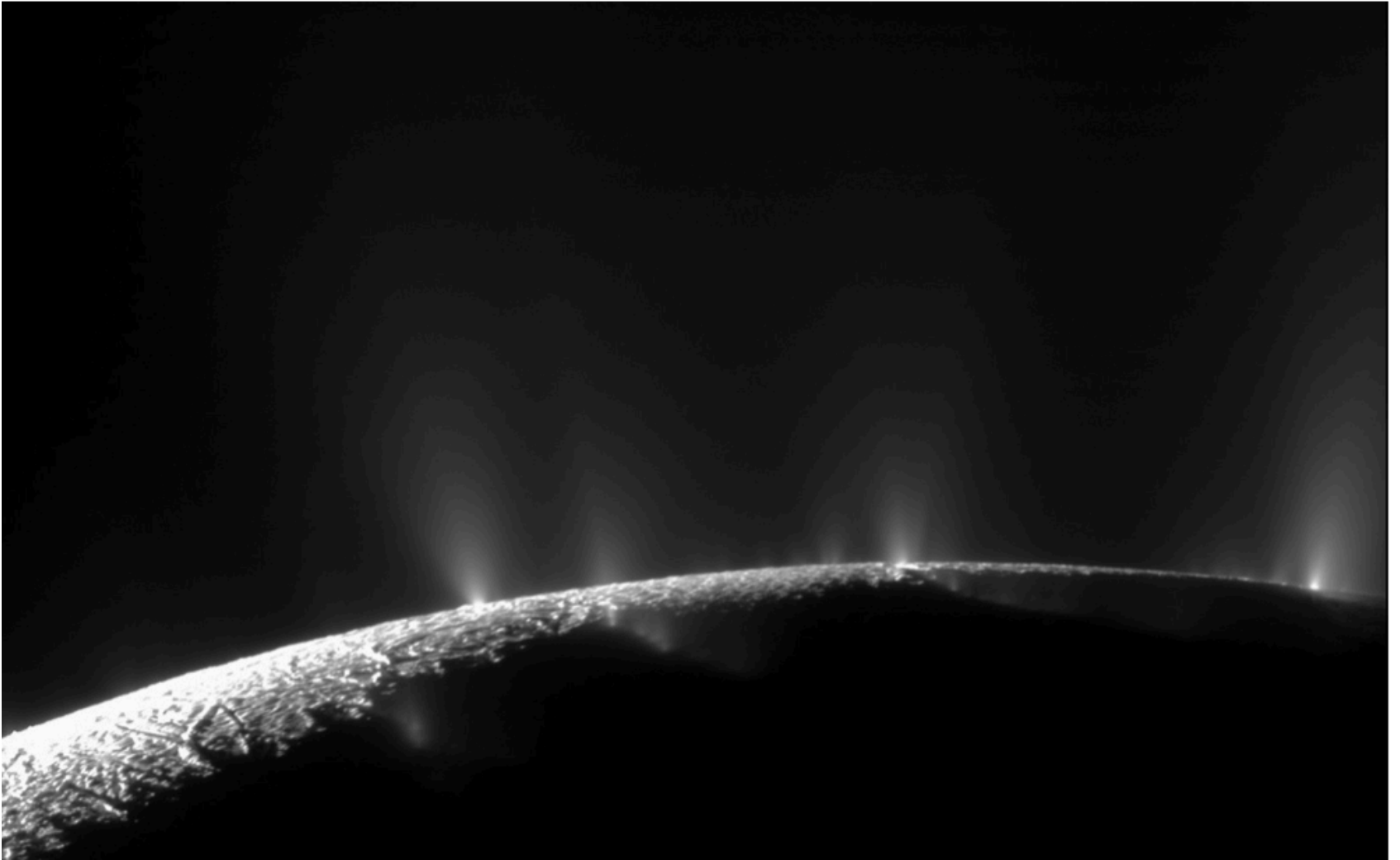
Núcleo rico em ferro

Encélado



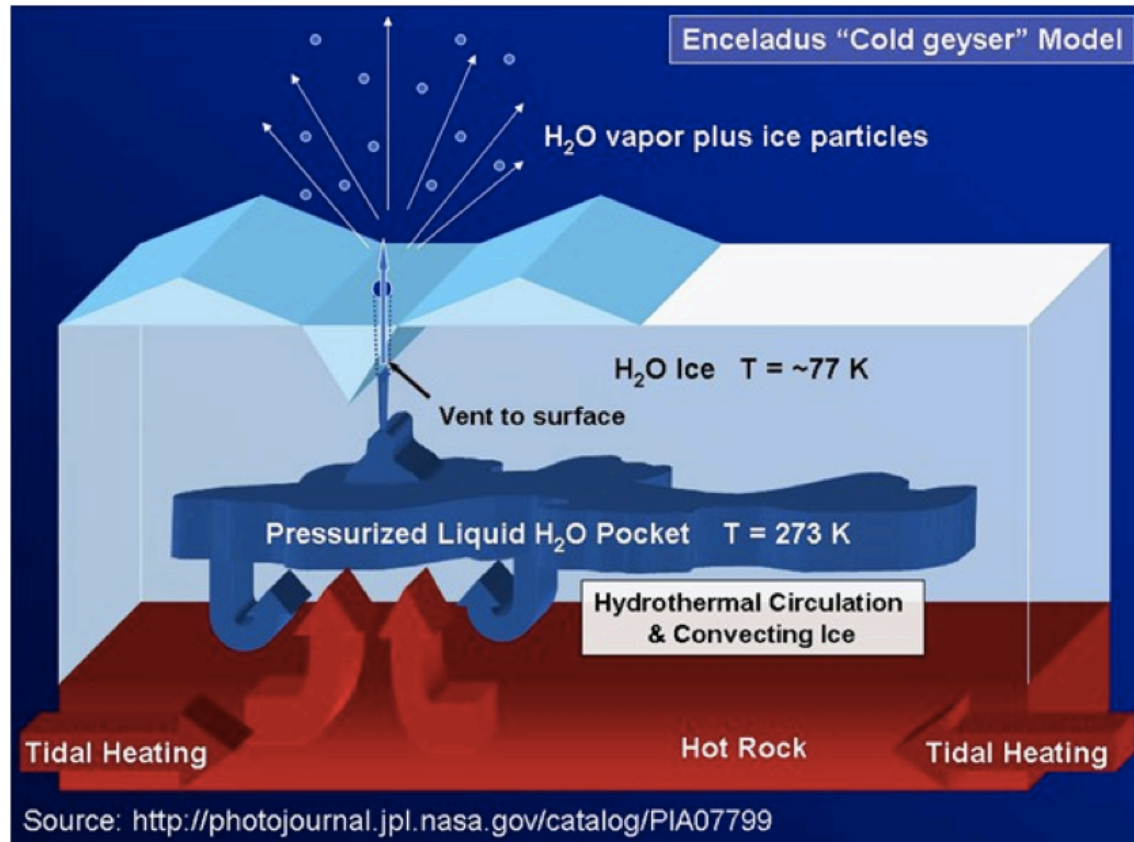
Plumas vistas pela sonda *Cassini*

Encélado



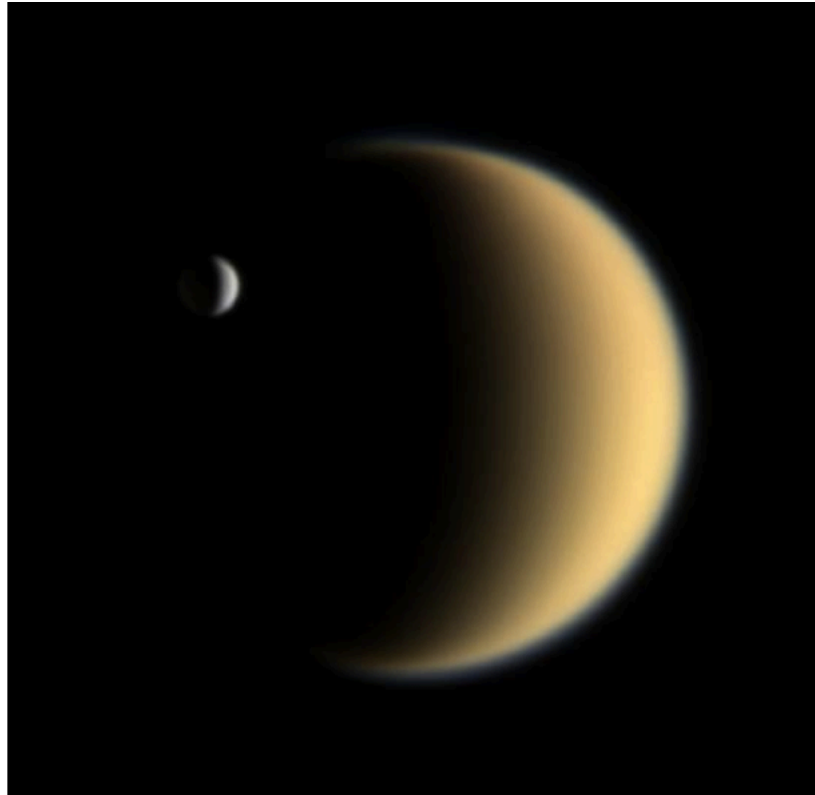
Close up das plumas

Encélado



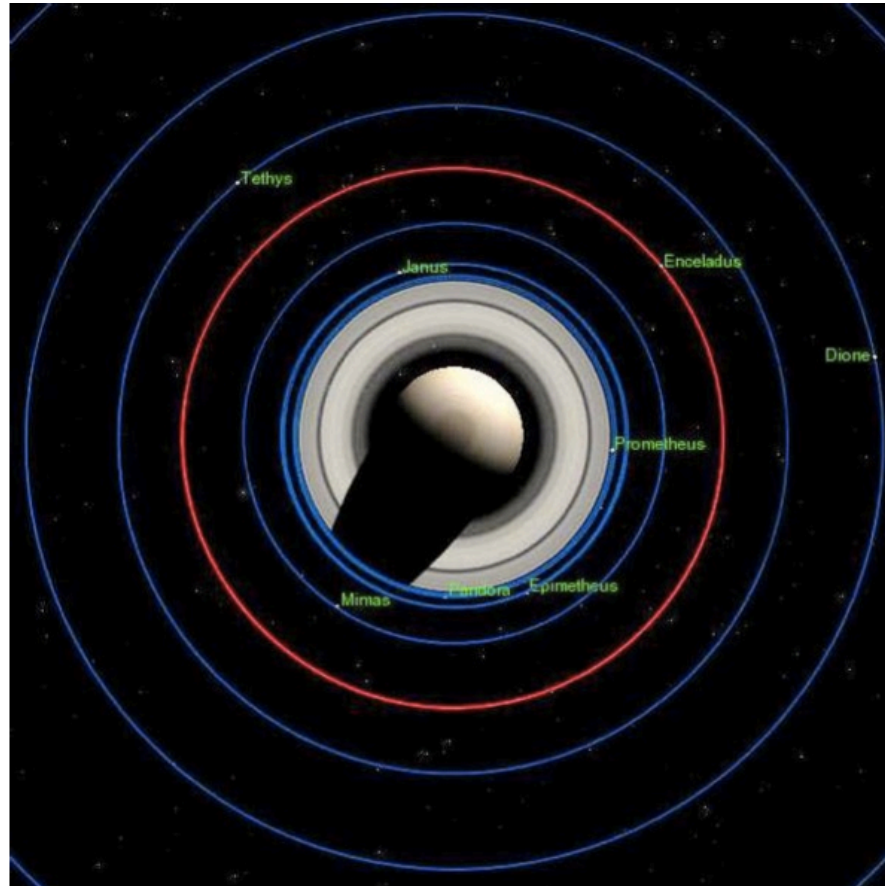
Encélado

Encélado e Titã



Uma lua tão pequena!
Como pode ser ativa?

Aquecimento por marés



Resonância 2:1 com Dione
mantém a órbita de Encélado excêntrica ($e \sim 0.004$)

Potencial de planetas oblatos

Segundo teorema de Newton

"Um corpo esféricamente simétrico afeta objetos externos como se toda sua massa estivesse concentrada em um ponto em seu centro"

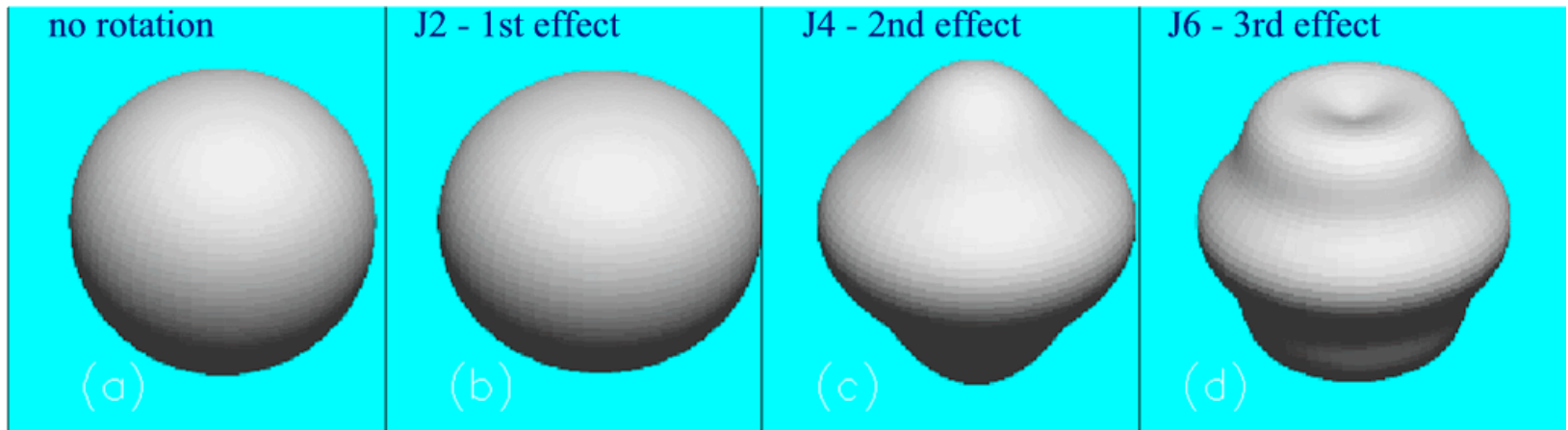
Porém planetas **não** são perfeitamente esféricos



Corpos oblatos por rotação

Potencial gravitacional

$$\Phi_g(r, \phi, \theta) = -\frac{GM}{r} \left[1 - \sum J_n P_{nm}(\cos \theta) \left(\frac{R}{r} \right)^n \right]$$



	$J_2 (\times 10^{-6})$	$J_4 (\times 10^{-6})$	$J_6 (\times 10^{-6})$
Jupiter	14696.4+/-0.2	587+/-2	34+/-5
Saturno	16290.7+/-0.3	936+/-3	86+/-9

Corpos oblatos

Potencial gravitacional

$$\Phi_g(r, \phi, \theta) = -\frac{GM}{r} \left[1 - \sum J_n P_{nm}(\cos \theta) \left(\frac{R}{r} \right)^n \right]$$

Movimento médio no plano equatorial ($\theta=\pi/2$)

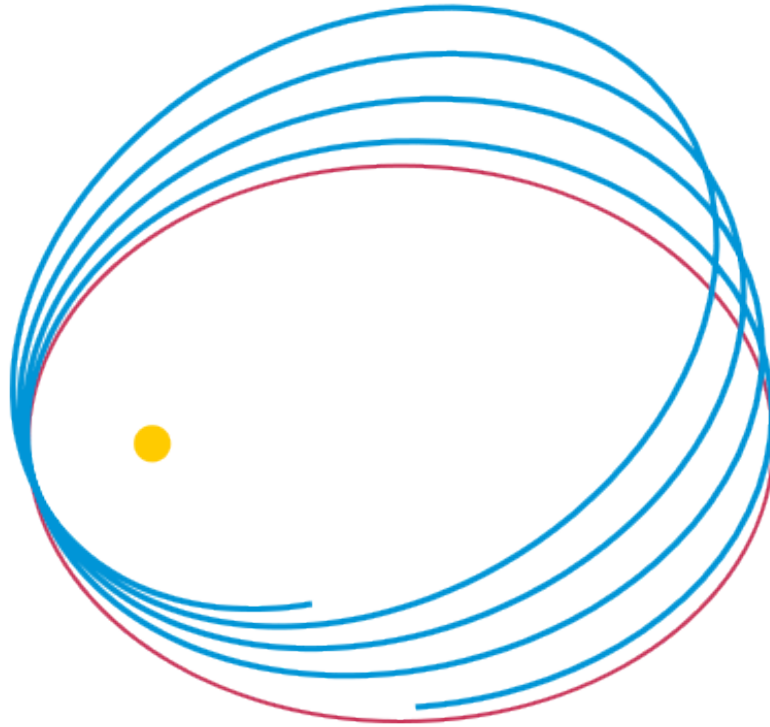
$$n^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_g}{\partial r} \Big|_{\theta=\pi/2} = \frac{GM}{r^3} \left[1 + J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \frac{15}{8} J_4 \left(\frac{R}{r} \right)^4 + \dots \right]$$

Frequência epicíclica

$$\kappa^2 = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^4 n^2) = \frac{GM}{r^3} \left[1 - J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + \frac{45}{8} J_4 \left(\frac{R}{r} \right)^4 + \dots \right]$$

Corpos oblatos: Precessão

$$n^2 > \kappa^2$$



Sintetizando

- Problema de 2 corpos

- Leis de Kepler
- Tipos de órbita
- Elementos orbitais

Tipo	Excentricidade	Energia
Círculo	$e=0$	$E=E_{\min}$
Elipse	$0 < e < 1$	$E_{\min} < E < 0$

Ligadas

- Problema de 3 corpos

- Constante de Jacobi
- Pontos Lagrangeanos
- Resonância

Parábola
Hiperbola

$e=1$
 $e>1$

$E=0$
 $E>0$

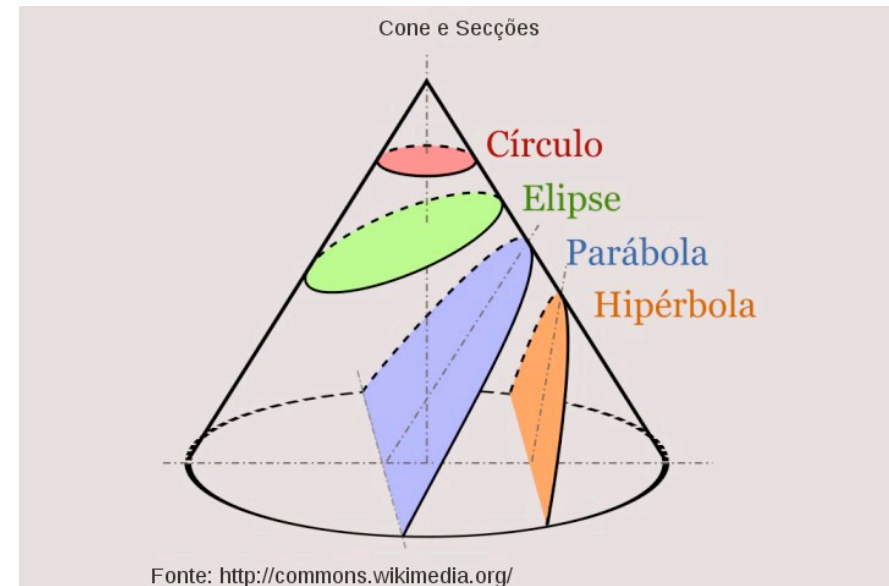
Não-ligadas

- Marés

- Io
- Encélado

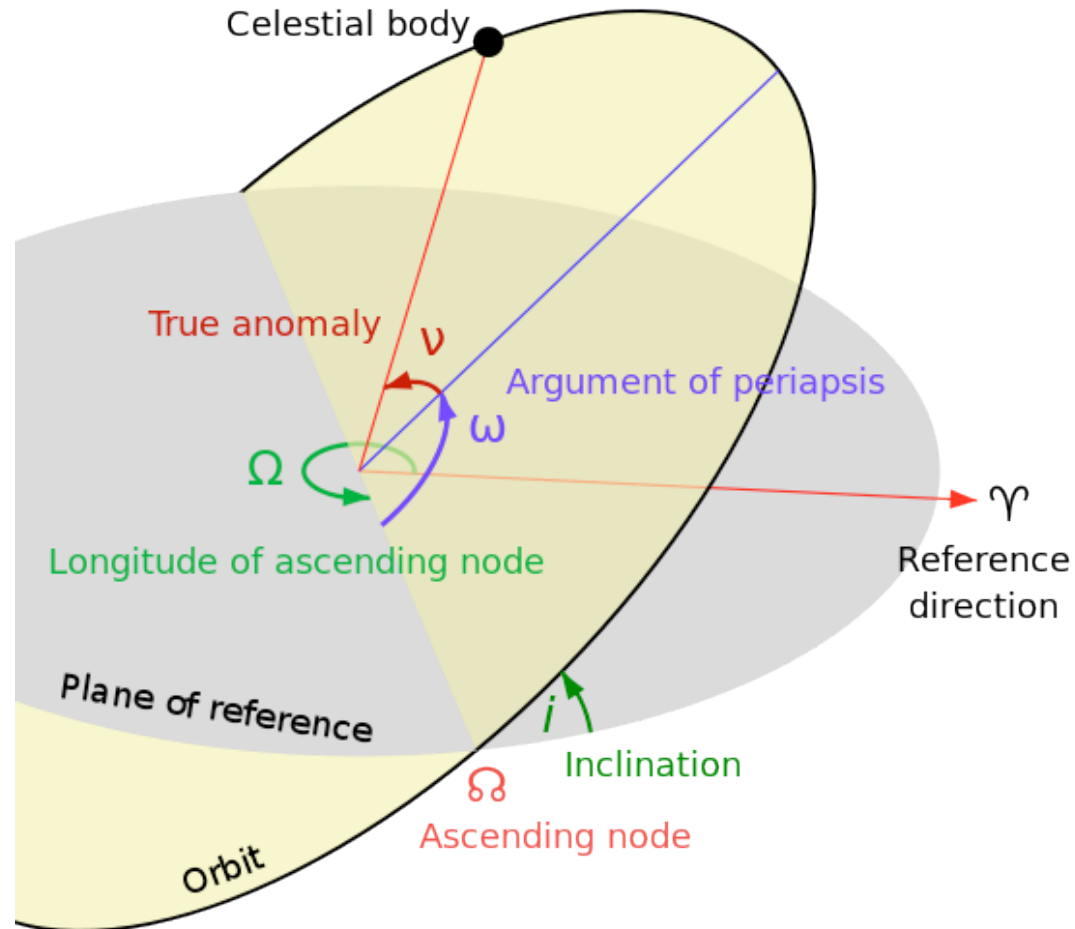
- Potencial de corpos oblatos

- Precessão



Sintetizando

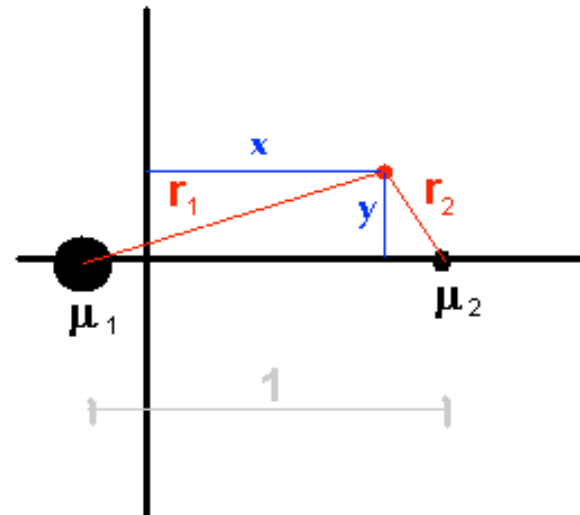
- Problema de 2 corpos
 - Leis de Kepler
 - Tipos de órbita
 - **Elementos orbitais**
- Problema de 3 corpos
 - Constante de Jacobi
 - Pontos Lagrangeanos
 - Resonância
- Marés
 - Io
 - Encélado
- Potencial de corpos oblatos
 - Precessão



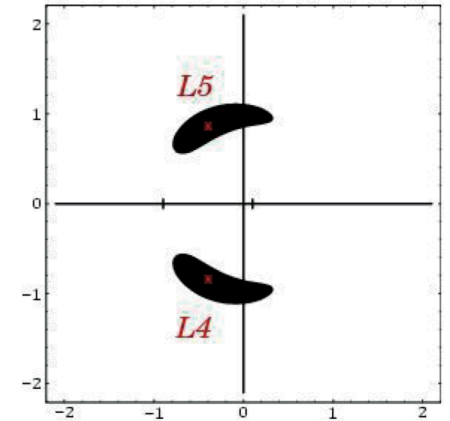
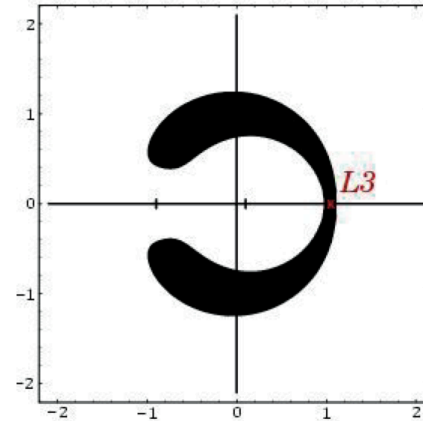
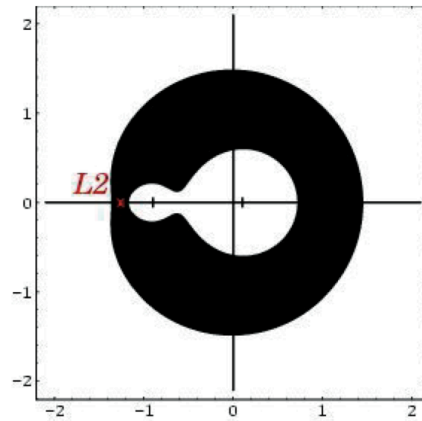
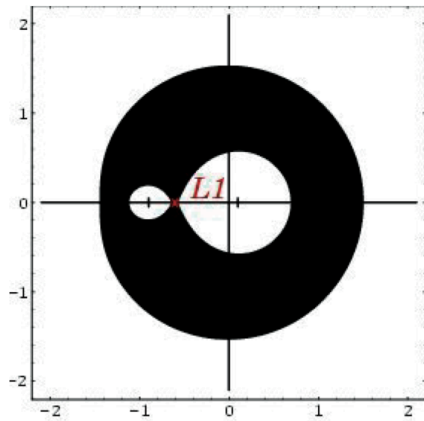
Sintetizando

- Problema de 2 corpos
 - Leis de Kepler
 - Tipos de órbita
 - Elementos orbitais
- Problema de 3 corpos
 - **Constante de Jacobi**
 - Pontos Lagrangeanos
 - Resonância
- Marés
 - Io
 - Encélado
- Potencial de corpos oblatos
 - Precessão

$$C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$



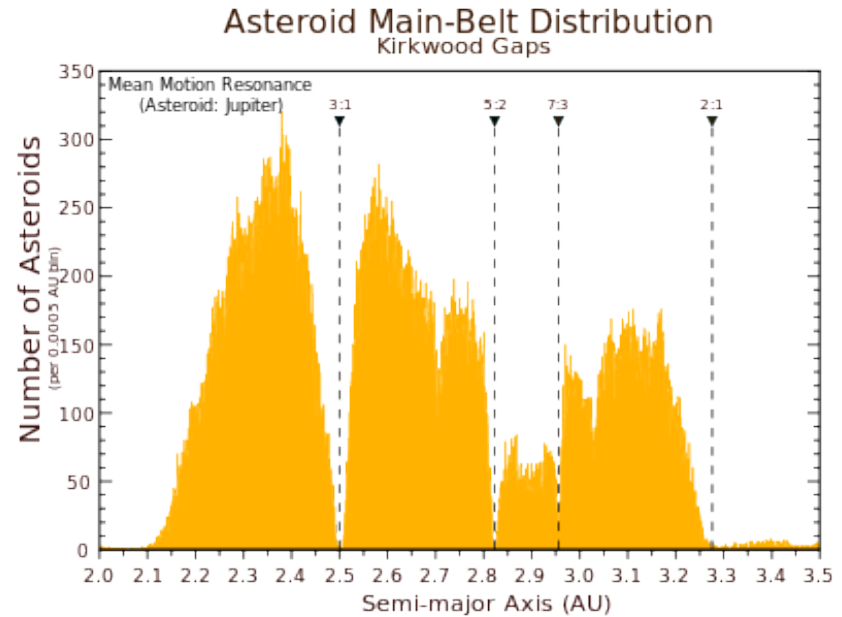
Sintetizando



- Constante de Jacobi
- Pontos Lagrangeanos
- Resonância
- Marés
 - Io
 - Encélado
- Potencial de corpos oblatos
 - Precessão

Sintetizando

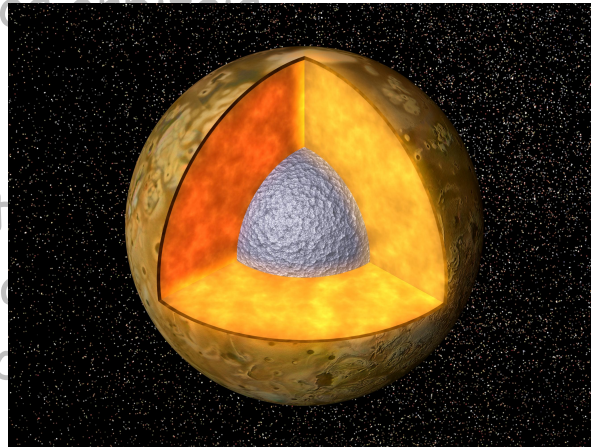
- Problema de 2 corpos
 - Leis de Kepler
 - Tipos de órbita
 - Elementos orbitais
- Problema de 3 corpos
 - Constante de Jacobi
 - Pontos Lagrangeanos
 - Resonância
- Marés
 - Io
 - Encélado
- Potencial de corpos oblatos
 - Precessão



Sintetizando

- Problema de 2 corpos

- Leis de Kepler
- Tipos de órbita
- Elementos orbitais



- Problema de

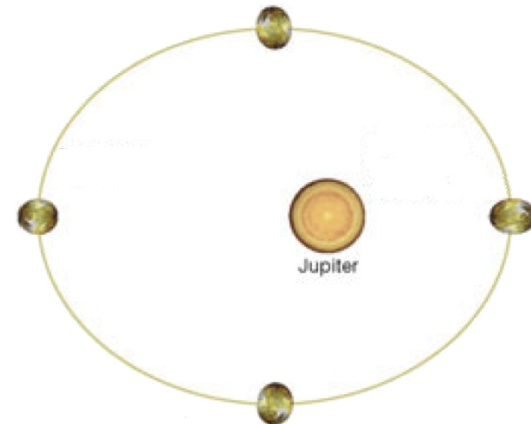
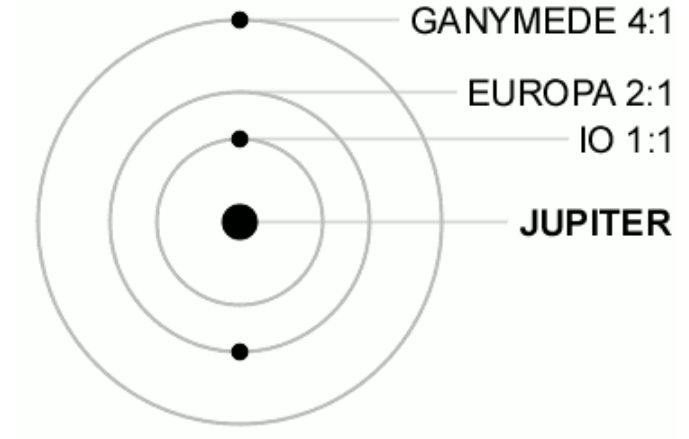
- Constante
- Pontos L
- Resonância

- **Marés**

- Io
- Encélado

- Potencial de corpos oblatos

- Precessão

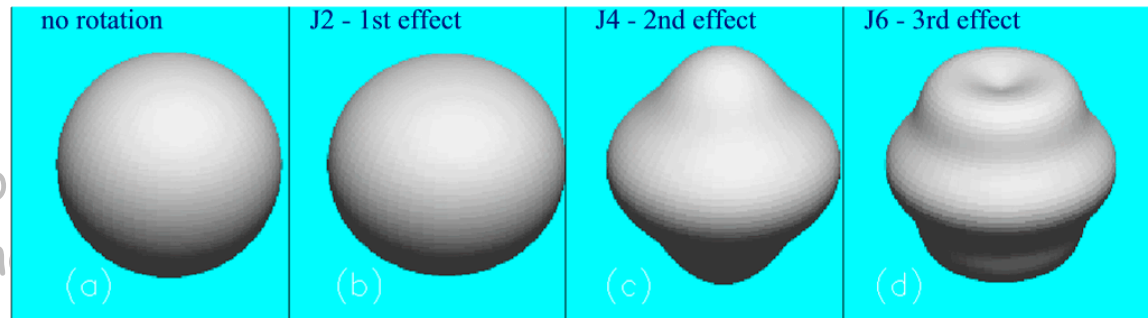


Sintetizando

- Problema de 2 corpos
 - Leis de Kepler
 - Tipos de órbita
 - Elementos orbitais

$$\Phi_g(r, \phi, \theta) = -\frac{GM}{r} \left[1 - \sum J_n P_{nm}(\cos \theta) \left(\frac{R}{r} \right)^n \right]$$

- Problema de 3 corpos
 - Constante de Jacobi
 - Pontos Lagrangean
 - Resonância

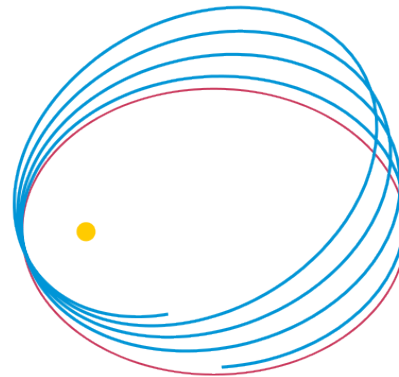


- Marés
 - Io
 - Encélado
- Potencial de corpos oblatos
 - Precessão

Sintetizando

- Problema de 2 corpos
 - Leis de Kepler
 - Tipos de órbita
 - Elementos orbitais
- Problema de 3 corpos
 - Constante de Jacobi
 - Pontos Lagrangeanos
 - Resonância
- Marés
 - Io
 - Encélado
- Potencial de corpos oblatos
 - Precessão

$$n^2 > \kappa^2$$



Frequência epicíclica

$$\kappa^2 = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^4 n^2)$$